

清华大学

综合论文训练

题目：关于 Liénard 方程周期解的
Massera 定理的改进

系 别：数学科学系

专 业：数学与应用数学（第二学位）

姓 名：吴沛凡

指导教师：杨利军 副教授

2013年6月4日

关于学位论文使用授权的说明

本人完全了解清华大学有关保留、使用学位论文的规定，即：学校有权保留学位论文的复印件，允许该论文被查阅和借阅；学校可以公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存该论文。

(涉密的学位论文在解密后应遵守此规定)

签 名： _____ 导师签名： _____ 日 期： _____

中文摘要

本文简要介绍了 Liénard 方程极限环存在唯一性的研究，并放松了 Massera 定理关于函数单调性的假设得到了极限环的存在唯一性。

在 Liénard 方程极限环存在唯一性介绍中，存在性介绍了 Poincaré 和 Filippov 等人的工作，而唯一性介绍了比较法和地形系法两种较为通用的方法，并介绍了 Sansone 和 Massera 等人的贡献。

Massera 定理对于函数 $f(x)$ 有全局单调性的要求，可以放松到区间 (α, δ) 上，并且这个区间只依赖于 $f(x)$ 和 $F(x)$ 的零点。本文的最后证明了一个关于扰动的结论。

关键词： Liénard 方程 极限环 存在性 唯一性

ABSTRACT

This paper briefly introduced research on the existence and uniqueness of periodic solution for Liénard equation. It also relaxed the monotonicity assumption in Massera's theorem.

In the introduction of research of Liénard equation, this paper briefly introduced works by Poincaré and Filippov for existence of limit cycles. For the uniqueness of limit cycles, this paper introduced two main methods: integral method (energy method included) and geometrical method. These methods are contributions of Sansone and Massera.

The classical Massera's monotonicity assumptions which are required in the whole line can be relaxed to the interval (α, δ) . Both of the points α and δ are determined by zero points of functions $f(x)$ and $F(x)$. In the final part of this paper, a perturbation criterion of uniqueness is presented.

Key words: Liénard equation limit cycle existence uniqueness

目 录

| | |
|------------------------------------|----|
| 第 1 章 引言 | 1 |
| 1.1 选题背景和选题意义 | 1 |
| 1.2 研究目的及论文主要内容 | 1 |
| 第 2 章 文献综述和 Liénard 方程相关研究方法 | 3 |
| 2.1 存在性 | 3 |
| 2.2 唯一性 | 4 |
| 2.2.1 比较法 | 5 |
| 2.2.2 地形系法 | 5 |
| 第 3 章 条件放宽的 Massera 定理 | 7 |
| 3.1 定理证明 | 8 |
| 3.2 一个摄动的结果 | 11 |
| 第 4 章 结论 | 13 |
| 插图索引 | 14 |
| 公式索引 | 15 |
| 参考文献 | 16 |
| 致 谢 | 17 |
| 声 明 | 18 |
| 附录 A 外文资料的书面翻译 | 19 |
| A.1 引言 | 19 |
| A.2 唯一性定理 | 20 |
| A.3 一个新的结果 | 24 |
| A.4 一个遗留的问题 | 27 |

第 1 章 引言

1.1 选题背景和选题意义

形式如下的微分方程：

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$$

一直是微分方程极限环研究中的焦点。这不仅因为这一类方程有明确的物理意义： $f(x, \dot{x})\dot{x}$ 代表阻尼力， $-g(x)$ 代表弹性力^[1]，而且因为许多其他的微分方程动力系统经坐标变换后能化为这种方程。因此研究形如上式的微分方程有实际意义和普遍性。

Liénard 方程指的是形式如下的微分方程：

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1-1}$$

这个方程可以化为相平面上的形式：

$$\dot{x} = y \tag{1-2}$$

$$\dot{y} = -g(x) - f(x)y \tag{1-3}$$

也可以通过 Liénard 变换化为 Liénard 平面上的形式：

$$\dot{x} = y - F(x) \tag{1-4}$$

$$\dot{y} = -g(x) \tag{1-5}$$

其中系统1-2中的点通过非线性变换 $(x, y + F(x))$ 可以变为系统1-4上的点，而 x 轴没有变化使得很多性质不会因此变换而改变。后文会基于这两个系统研究极限环的存在和唯一性问题。

1.2 研究目的及论文主要内容

本文的研究目的是改善 Liénard 方程极限环存在性和唯一性的相关结论。本文放宽了 Massera 定理关于函数 $f(x)$ 全局单调性的假设，将单调性限于原点附

近，从而加强了 Massera 定理。

本文的主要内容分为以下部分：

第 1 章，引言。简要介绍本文的选题背景意义和研究目的。

第 2 章，文献综述和 Liénard 方程相关研究方法。主要阐述 Liénard 方程极限环存在唯一性的研究进路，前人的研究成果和方法论的简要介绍。这一章阐述证明存在性的 Poincaré-Bendixson 引理，并分别阐述比较法和地形系法两种证明唯一性的方法。

第 3 章，条件放宽的 Massera 定理。这一章放松 Massera 定理的单调性要求并得到唯一性结论。文中会给出定理和证明过程。

第 4 章，结论。总结本文得到的结果。

第 2 章 文献综述和 Liénard 方程相关研究方法

由于在微分方程定性理论和电路理论中的广泛实际应用，Liénard 方程极限环的性质得到了非常广泛的研究。早在 1926 年，Van der Pol^[2] 得到了电子管中等幅振荡的方程：

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (2-1)$$

这个方程后来以他的名字命名，也被归为 Liénard 方程的一种特殊形式。虽然他不了解数学界关于极限环的相关工作，但他用图解法证明了孤立闭轨线的存在性。

下面主要介绍 Liénard 方程极限环存在性和唯一性的工作。

本文中约定 $F(x) \equiv \int_0^x f(x) dx$, $G(x) = \int_0^x g(x) dx$

2.1 存在性

在判定 Liénard 方程极限环存在性的方法中，绝大多数方法都是基于著名的 Poincaré-Bendixson 环域定理：

定理 2.1： Ω 为一环域，其中不含奇点。与 Ω 境界线相交的轨线都从外部进入内部，则内部存在内、外稳定极限环（可能重合为一条）。如果都从内部跑出外部，结论类似，是不稳定极限环。

因此证明 Liénard 方程极限环存在性时，一种常用的方法是找到极限环的内、外境界线，构造如定理 2.1 所述的环域（Van der Pol 方程闭轨线的存在性即由此定理得到）。

最容易的方法是 Liénard 作图法^[3]，可以画出相平面上任意一点 $P(x,y)$ 由系统 1-2 确定的方向。作法如下：过 P 作 $PR \parallel y$ 轴，交曲线 $y = F(x)$ 于点 $R(x, F(x))$ ，过 R 作 $RQ \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 $Q(0, F(x))$ ，连接 PQ ，过 P 作直线 PQ 的垂直线 PN ，那么这个垂直线就是过 P 点的方向场的方向。

对于解决 Liénard 方程极限环存在性的问题，Filippov^[4] 和 Dragilev 的工作都很重要：

定理 2.2: (Filippov) 设系统1-2中 $g(x)$ 满足条件 $xg(x) > 0$, 且 $G(\pm\infty) = +\infty$ 。又设经过 Filippov 变换后, 函数 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 满足条件:

(1) 对于小的 $z(0 < z < \delta)$ 有 $F_1(z) \leq F_2(z)$, 但不是 $F_1(z) \equiv F_2(z)$; 又 $F_1(z) < a\sqrt{z}, F_2(z) > -a\sqrt{z}$, 其中 $0 < a < \sqrt{\delta}$;

(2) 存在一数 $z_0 > 0$ 使 $\int_0^{z_0} (F_1(z) - F_2(z)) dz > 0$ 且当 $z > z_0$ 时有 $F_1(z) \geq F_2(z)$, $F_1(z) > -a\sqrt{z}, F_2(z) < a\sqrt{z}$

则系统1-2存在稳定极限环。

定理 2.3: (Dragilev) 在系统1-2中, 如果

(1) 当 $|x| < A$ 时 $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足 Lipschitz 条件, 其中 A 充分大;

(2) $xg(x) > 0$, 当 $x \neq 0$ 时 $G(\pm\infty) = +\infty$;

(3) $F(x) < 0$ 当 $0 < x < x_1$, $F(x) > 0$ 当 $x_2 < x < 0$;

(4) $\exists M > \max(x_1, |x_2|), k_2 < k_1$, 当 $x > M$ 时 $F(x) \geq k_1$, 当 $x < -M$ 时 $F(x) \leq k_2$

则系统1-2存在极限环。

以上两个定理都是通过构造内外境界线, 使得条件符合 Poincaré-Bendixson 引理得到极限环的存在性的。

2.2 唯一性

对于普通的微分方程, 唯一性问题并没有被很好地研究过, 目前依然只能解决一些特殊方程闭轨线的唯一性问题。

Liénard 方程极限环的唯一性被广泛研究过。Liénard 本人在 1929 年^[5] 证明了第一个与唯一性相关的定理:

定理 2.4: (Liénard) 设系统1-2中 $g(x) \equiv x$, $f(x)$ 为偶函数, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x| < \delta$ 时有 $f(x) < 0$, 当 $|x| > \delta$ 时有 $f(x) > 0$, 又 $\int_0^{\pm\infty} f(x) dx = \pm\infty$, 则系统1-2存在唯一的(稳定)极限环。

较早的工作还有 Levinson 和 Smith 的^[6], 把以上定理推广到了 $g(x)$ 为非线性的情况中去:

定理 2.5: (Levinson-Smith) 存在 $\delta > 0$, 当 $|x| < \delta$ 时 $f(x) < 0$, 当 $|x| > \delta$ 时 $f(x) > 0$ 。 $xg(x) > 0$ 且 $G(\pm\infty) = +\infty$, $F(\pm\infty) = \pm\infty$, 则存在唯一的(稳定)极限环。

鉴于 $f(x)$ 表示振动系统的阻尼系数，上述定理的条件都表示当位移很小时阻尼是负数，而位移较大时阻尼为正，在左右两侧各有一次阻尼为 0 的情形出现。但仅有这些条件不能保证极限环的唯一性，极限环的个数与 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 都有关系。

下文介绍解决唯一性问题的两种常见方法，以及从这些方法中获得的结论。

2.2.1 比较法

比较法由 Liénard 提出，并由 Sansone 和张芷芬得到发展。其基本思想是取一个正定函数 $\lambda(x,y)$ ，反设极限环不是唯一的，那么在两个环 Γ_1 和 Γ_2 上分别对此正定函数的全微分求积。正定函数积分一周后本应该回到原来的值，但如果在两个环上积分值不同，那么就导出矛盾说明最多只存在一个极限环。Sansone 和张芷芬证明方法的不同之处在于函数的选取：Sansone 随意取一个正定函数，而张芷芬使用了函数的散度。

定理 2.6: (Sansone) 在系统 1-2 中 $g(x) \equiv x$, $f(x)$ 连续, 存在 $\delta_{-1} < 0 < \delta_1$ 使得 $f(x) < 0$, 否则 $f(x) > 0$, 又 $F(\pm\infty) = \pm\infty$, 且存在 $\Delta > 0$ 使 $F(\Delta) = F(-\Delta) = 0$, 则系统 1-2 存在唯一极限环, 它是稳定的。

令 $\lambda(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 那么 $d\lambda = F(x)dy$, 首先可以证明极限环与 $x = \pm\Delta$ 是相交的, 然后假设有两个极限环 $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ (因为原点是唯一的奇点), 分段考虑可以推出积分值不相等, 从而证明了唯一性。

2.2.2 地形系法

地形系法的贡献主要来自于 Sansone^[7] 和 Massera^[8], 其基本思想是对于一个闭环 γ 作相似变换得到一族曲线 γ_k 。而在这一族曲线中有符合 Poincaré-Bendixson 引理要求的内外境界线, 从而得到稳定极限环的存在唯一性。

但使用这个方法时, 轨线的“星形”性质 (star-shaped) 是必要的。“星形”的意思是从原点出发的任意一条半射线与轨线只交于一点 (可以相切地穿过)。

定理 2.7: (Massera) 在系统 1-2 中, 令 $g(x) \equiv x$ 。假设 $f(x)$ 在 $x < 0$ 时单调下降, 在 $x > 0$ 时单调上升, 则系统 1-2 有至多一个极限环, 且它是稳定的。

Massera 这个定理是加强了 Sansone 的结果。Sansone 得到类似的结论没有假设 $f(x)$ 的单调性, 但假设了 $|f(x)| < 2$, 而这显然不符合多项式的情形。Sansone

和 Massera 得到的结果都是基于坐标变换:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \sin^2 \theta f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad (2-2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -1 - \sin \theta \cos \theta f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad (2-3)$$

为了保证闭轨线的“星形”性质， $\frac{d\theta}{dt}$ 不能多次改变符号。而不管是 Sansone 所加的绝对值条件还是 Massera 所加的单调性条件，都是为了保证闭轨线的“星形”性质。

第 3 章 条件放宽的 Massera 定理

在后文中，为了根据 Massera^[8] 的结果作出拓展，对系统1-2作以下假设：

假设 3.1: $g(x) \equiv x$

这个假设是为了和 Massera 的论述统一，并且使用类似的地形系法。

假设 3.2: $f(x)$ 是连续函数，且在 $a < 0 < b$ 时 $f(x) < 0$ ，而在这个区间外 $f(x) > 0$ ，在 $|x|$ 足够大时 $xF(x) > 0$ 。

这个假设，根据 Villari^[9] 的结论，保证了至少存在一个稳定极限环。

假设 3.3: $F(x)$ 有三个零点，分别是 $\alpha < 0$ ， 0 和 $\beta > 0$ 。在 $\alpha < x < \beta$ 时 $xF(x)$ 为负，反之为正。在 $x < \alpha$ 和 $x > \beta$ 时 F 是单调递增的。

符合假设3.3条件的 $F(x)$ 如图3.1所示：

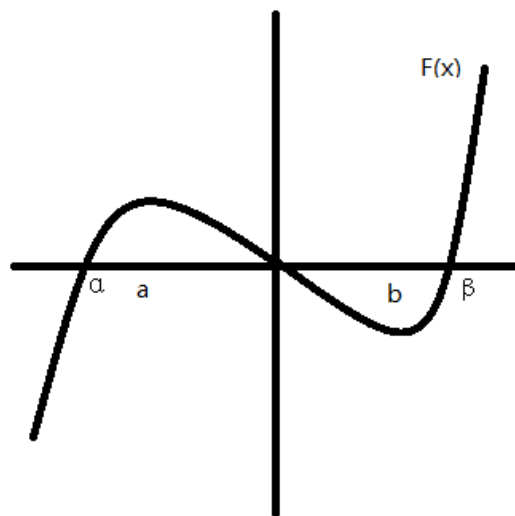


图 3.1 满足假设3.3的 $F(x)$

事实上假设3.2比假设3.3更强。在假设3.3的条件下，Levinson 和 Smith^[6] 有以下定理：

定理 3.1: 当假设3.3满足时，最多有一个极限环与 $x = \alpha$ 和 $x = \beta$ 两线同时相交。

3.1 定理证明

Massera 定理要求如图3.2所示的 $f(x)$ 具有全局单调性:

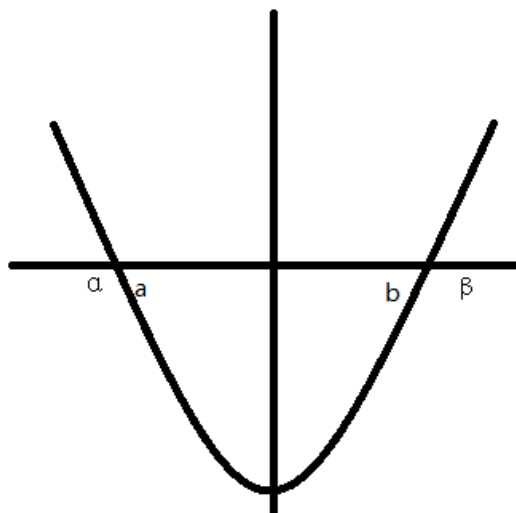


图 3.2 Massera 定理中的 $f(x)$

下文给出放松了 Massera 定理全局单调性的定理并证明之^[10]。其中 a 和 b 分别是 $f(x)$ 的两个非平凡零点, α 和 β 分别是 $F(x)$ 的两个非平凡零点:

定理 3.2: 在假设3.2下, 满足以下条件时:

- $|\alpha| > \beta$, $f(x)$ 在 $\alpha < x < 0$ 上单调下降, $f(x)$ 在 $0 < x < \delta$ 上单调上升;
- $|\alpha| < \beta$, $f(x)$ 在 $\delta_1 < x < 0$ 上单调下降, $f(x)$ 在 $0 < x < \beta$ 上单调上升;

其中

$$\delta = \sqrt{\left(1 + F(a) + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2 + \beta^2}, \delta_1 = \sqrt{\left(-F(b) + 1 + \frac{\beta^2}{2}\right)^2 + \alpha^2}$$

Liénard 方程系统1-2恰好有一个极限环, 且是稳定的。

证明 注意到 Sansone 在定理2.6中已经证明了在 $|\alpha| = \beta$ 时的情形, 而且此时单调性假设不是必要的。为了定理证明简化的考虑将证明分成以下几步。

第一步, 考虑 $|\alpha| > \beta$ 的情形。

这一步说明在假设3.2下, 如果 $f(x)$ 在 $\alpha < x < 0$ 上单调下降, 并在 $x > 0$ 上单调上升, 那么系统1-4恰好有一个极限环, 而且是稳定的。

在 Liénard 平面上，在 $y > 0$ 时与 $x = \alpha$ 相交的任意闭轨线都与 $x = \beta$ 相交，因为在 $\alpha < 0 < \beta$ 时轨线距原点的距离是递增的。如果在 $x > \alpha$ 的半平面上保持 Massera 定理假设的单调性，那么由 Massera 定理，在这个半平面上至多只有一个稳定的极限环。这个结论的证明是在系统1-2中得到的，但在系统1-4上也成立因为这两个系统之间的变换并不改变 x 坐标。所以在 Liénard 平面上只有以下两种可能：

- 在 $x > \alpha$ 上没有极限环。那么由上所述，所有极限环都会与 $x = \alpha$ 、 $x = \beta$ 两条线相交，那么根据定理3.1，极限环是唯一的。
- 在 $x > \alpha$ 上有一个极限环。如果这个极限环不是唯一的，那么另一个极限环必然与 $x = \alpha$ 、 $x = \beta$ 两条线相交，而 f 的符号表明这样的的极限环是外稳定极限环。让 f 在 α 附近有摄动，并让 $x < \alpha$ 时 f 的值依然为正（从而保持了假设3.3中 $F(x)$ 的性质），这个半稳定极限环就分成了我一个稳定极限环和一个不稳定极限环，但这就引发了矛盾：两个极限环都需要与 $x = \alpha$ 、 $x = \beta$ 两条直线相交，根据定理 3.1，这是不可能的。

第二步，对于 $|\alpha| < \beta$ 的情形，和第一步一样，可以得到一个对偶的结果：

在假设3.2下，如果 $f(x)$ 在 $x < 0$ 上单调下降，在 $0 < x < \beta$ 上单调上升，那么系统1-4恰好有一个极限环，而且是稳定的。

现在证明中已经限制了一侧，为了完善证明需要找到另一侧的界限。

第三步，考虑 $|\alpha| > \beta$ 的情形。

这一步说明在假设3.2下，从 $P(\alpha, F(a) + 1)$ 点出发的一条半轨线，与等倾线 $y = F(x)$ 在半平面 $x > 0$ 上相交于 $S(x, F(x))$ ，此时 $x < \delta$ ，且 $\delta = \sqrt{\left(1 + F(a) + \frac{\alpha^2}{2}\right)^2 + \beta^2}$ 。

在系统1-4上，轨线的斜率由以下方程给定：

$$y'(x, y) = \frac{-x}{y - F(x)} \quad (3-1)$$

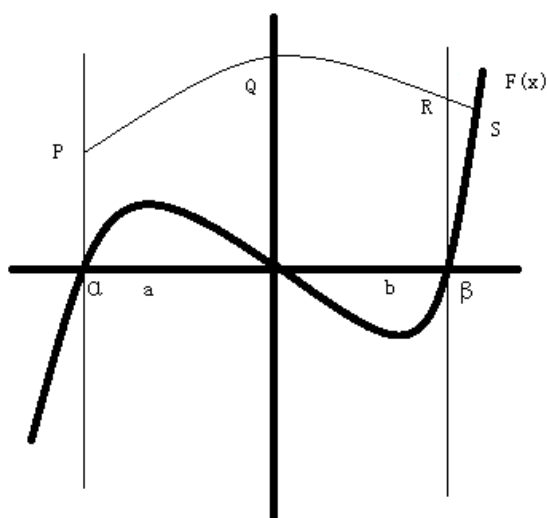


图 3.3 第三步证明图示

首先可以注意到，从 $P(\alpha, F(a)+1)$ 点出发的一条正半轨线，由于在 $x < 0$ 的半平面内斜率为正，一定与 y 轴相交于 $Q(0, \bar{y})$ 。因为在条形带 $\alpha < x < \beta$ 中，轨线到原点的距离在不断增加，并且 $|\alpha| > \beta$ ，所以这条正半轨线也与 $x = \beta$ 相交于点 $R(\beta, \hat{y})$ 。从而

$$y(Q) - y(P) = \int_{\alpha}^0 y'(x, y) dx = \int_{\alpha}^0 \frac{-x}{y - F(x)} dx \quad (3-2)$$

在条形带 $\alpha < x < 0$ 中， $F(x) \leq F(a)$ ，因此斜率方程3-1为正，从而 $y - F(x) \geq y - F(a) > 1$ ，那么：

$$y(Q) - y(P) = \int_{\alpha}^0 \frac{-x}{y - F(x)} dx < \int_{\alpha}^0 -x dx = \frac{\alpha^2}{2} \quad (3-3)$$

化简得

$$y(Q) = \bar{y} < 1 + F(a) + \frac{\alpha^2}{2} \quad (3-4)$$

在条形带 $0 < x < \beta$ 中，斜率方程3-1为负。因此上述的正半轨线与 $x = \beta$ 的交点为 $R(\beta, \hat{y})$ ，其中 $\hat{y} < \bar{y} < 1 + F(a) + \frac{\alpha^2}{2}$ 。在 $x > \beta$ 时，轨线到原点的距离逐

渐下降。这条正半轨线与等倾线 $y = F(x)$ 交于点 $S(x, F(x))$ ，其中

$$x < \sqrt{\left(1 + F(a) + \frac{\alpha^2}{2}\right) + \beta^2} \equiv \delta$$

从而，第三步所需要证明的结果得到了。从这个证明中也可以得到任何与等倾线在 $x > \delta$ 区域相交的负轨线都与直线 $x = \alpha$ 相交。因此，只要在 $\alpha < x < \delta$ 这个区间内要求函数的单调性，如果系统1-4存在极限环就一定会与 $x = \alpha$ 和 $x = \beta$ 两条直线相交，根据定理3.1就得到了极限环的唯一性。

以上讨论了 $|\alpha| > \beta$ 的情形。对于 $|\alpha| < \beta$ ，存在对偶的结果：

第四步，在假设3.2下，从 $P(\beta, F(b) - 1)$ 点出发的一条半轨线，与等倾线 $y = F(x)$ 在半平面 $x < 0$ 上相交于 $S(x, F(x))$ ，此时 $x > \delta_1$ ，且 $\delta_1 = -\sqrt{\left(-F(b) + 1 + \frac{\beta^2}{2}\right)^2 + \alpha^2}$ 。

这就完成了证明。

□

注释 3.1：在上述的定理中，以这种方式推出的 δ 和 δ_1 并不是最优的，直接取轨线与 $F(x)$ 交点的横坐标会得到更宽松的条件，即 $\hat{\delta} = F^{-1}\left(\sqrt{\delta^2 - x^2}\right)$ 和 $\hat{\delta}_1 = F^{-1}\left(\sqrt{\delta_1^2 - x^2}\right)$ 。但是在此处 δ 和 δ_1 更有意义，他们展现了 $f(x)$ 和 $F(x)$ 零点位置的重要性。

注释 3.2：这个定理也可以看成是经典 Massera 定理的一个扰动，即在区间 $[\alpha, \delta]$ 或者 $[\delta_1, \beta]$ 外，只要保持 $f(x)$ 的符号而不用保持单调性，就依然可以得到稳定极限环的存在唯一性。

从上文的证明中可以看出 $F(a)$ 和 $F(b)$ 的值十分重要，它保证了系统1-4的轨线是否与 $x = \alpha$ 和 $x = \beta$ 相交。

3.2 一个摄动的结果

根据以上的结果，以下的定理可以被简单证明：

定理 3.3：在假设3.2下，方程

$$\ddot{x} + \lambda f(x)\dot{x} + x = 0 \tag{3-5}$$

当 $\lambda \geq \hat{\lambda}$ 时有唯一的周期解， $\hat{\lambda}$ 满足

- 当 $|\alpha| > \beta$ 时, $\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{F^2(b)}}$
- 当 $|\alpha| < \beta$ 时, $\hat{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{F^2(a)}}$
- 当 $|\alpha| = \beta$ 时, $\hat{\lambda}$ 可以取任意值

证明 在 $|\alpha| = \beta$ 的情况下结果是显然的。

考虑第一种情形, 因为第二种情形会是一个对偶的证明方式。

考虑 Liénard 系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \lambda F(x) \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

注意到 λ 的值不会影响 a, b, α, β 的值。所以假设3.2保证了极限环的存在性。任意一条在 $y < 0$ 区域与 $x = \beta$ 相交的正半轨线都会与 $x = b$ 交于点 $P(b, y)$, 其中 $y < \lambda F(b)$ 。由于在条形带 $\alpha < x < \beta$ 中, 轨线离原点的距离越来越远, 因此当

$$\sqrt{\lambda^2 F^2(b) + b^2} \geq |\alpha|$$

这样的轨线会与直线 $x = \alpha$ 相交。那么所有的极限环都会与 $x = \alpha$ 和 $x = \beta$ 相交, 于是使用定理3.1可以得到极限环的唯一性结论。 \square

第 4 章 结论

本文首先介绍了 Liénard 方程极限环研究的历史和方法，并对 Liénard 方程极限环存在性和唯一性的已有方法与结论分别作了论述。Massera 定理是 Liénard 方程极限环存在唯一性的重要结论，而本文的主要部分论证了 Massera 定理条件的改进。Massera 定理对 $f(x)$ 的有全局单调性的要求，这个条件略强。事实上，可以把单调性限制在一个区间内，这个区间依赖于 $f(x)$ 和 $F(x)$ 的零点位置。在这个区间之外， $f(x)$ 只需要保持符号不变，而不需要单调性的要求。

这个条件放松的意义是允许了 $f(x)$ 某种程度的扰动，从而使得一个物理系统在更宽泛的条件下得到极限环的存在唯一性。这个定理的证明过程也是对 Massera 地形系法的延伸。



图 4.1 论文完成

插图索引

| | | |
|-------|---------------------------|----|
| 图 3.1 | 满足假设 3.3 的 $F(x)$ | 7 |
| 图 3.2 | Massera 定理中的 $f(x)$ | 8 |
| 图 3.3 | 第三步证明图示 | 10 |
| 图 4.1 | 论文完成 | 13 |

公式索引

| | |
|--------------|----|
| 公式 1-1 | 1 |
| 公式 1-2 | 1 |
| 公式 1-3 | 1 |
| 公式 1-4 | 1 |
| 公式 1-5 | 1 |
| 公式 2-1 | 3 |
| 公式 2-2 | 6 |
| 公式 2-3 | 6 |
| 公式 3-1 | 9 |
| 公式 3-2 | 10 |
| 公式 3-3 | 10 |
| 公式 3-4 | 10 |
| 公式 3-5 | 11 |
| 公式 A-1 | 19 |
| 公式 A-2 | 20 |
| 公式 A-3 | 20 |
| 公式 A-4 | 20 |
| 公式 A-5 | 21 |
| 公式 A-6 | 24 |
| 公式 A-7 | 24 |
| 公式 A-8 | 24 |
| 公式 A-9 | 25 |
| 公式 A-10..... | 25 |
| 公式 A-11..... | 26 |
| 公式 A-12..... | 26 |

参考文献

- [1] 张芷芬. 微分方程定性理论. 科学出版社, 1985
- [2] Pol B. LXXXVIII. On “relaxation-oscillations” . The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1926, 2(11):978–992
- [3] 叶彦谦. 极限环论. 上海科学技术出版社, 1984
- [4] Filippov A F. A sufficient condition for the existence of a stable limit cycle for an equation of the second order. *Matematicheskii Sbornik*, 1952, 72(1):171–180
- [5] Liénard A. Étude des oscillations entretenues. *Revue Générale de l'Électricité*, 1929, 23(901-912):946–954
- [6] Levinson N, Smith O K. A general equation for relaxation oscillations. *Duke Mathematical Journal*, 1942, 9(2):382–403
- [7] Sansone G. Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard. *Calcolo del periodo*. *Rend. Sem. Mat. Univ. e Politecnico Torino*, 1951, 10:155–171
- [8] Massera J. Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation di Liénard. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 1954, 9(4):367–369
- [9] Villari G. On the existence of periodic solutions Of the Lienard equation. *Nonlinear Anal*, 1983, 7:71–78
- [10] Villari G. An improvement of Massera's theorem for the existence and uniqueness of a periodic solution for the Liénard equation. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 2012, 44:187–195

致 谢

衷心感谢清华大学数学科学系导师杨利军副教授对本人论文的精心指导，纵然学生资质驽钝，导师始终耐心指点。他的言传身教令我也能一窥数学研究之门径，而他严谨的学风与循循善诱的育人之道也是我为学的标杆，让我倍受鼓舞并且受益终身。

感谢清华大学数学科学系的各位授课老师的谆谆教导。

最后感谢帮助过我的各位同学师兄师姐，以及父母的爱和支持。他们让我意识到，把“为爱我的人谋幸福”作为生活的意义，是一件满足而幸运的事情。

声 明

本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人享有著作权的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

签 名：_____ 日 期：_____

附录 A 外文资料的书面翻译

Liénard 方程极限环的唯一性：Sansone 的贡献 M. Sabatini, G. Villari

A.1 引言

本篇论文的目的是展示一些关于 Liénard 方程极限环唯一性的，经典的和近期的结果。Liénard 方程如下所示：

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (\text{A-1})$$

由于该方程在机械运动和电路理论中的运用，这个方程是常微分方程定性理论中被研究的最多的之一。所以这可以被看成是极限环理论的起点和基准。而 Liénard 方程和其他微分方程系统的联系（比如说二次方程）让这个方程对于平面系统研究显得更为重要。

我们不愿穷尽所有的文献，但是直接关注 Giovanni Sansone 的结果，以及这些结果对于本领域的贡献。在 Liénard 于 1928 年提出这个方程并且证明了第一个极限环的唯一性定理之后，Levinson 和 Smith 在 1942 年做出了另一个重要的结果。但是 Sansone 于 1949 年的贡献才使得这个问题得到重视起来。Filippov 的著名文章关注了极限环的存在性。而对于中国学者的贡献，由于语言原因很多结果没有得到承认，比如叶彦谦的《极限环论》。最后，Staudé 对于直至 70 年代的文献作了详细的总结。回到 Sansone 的工作，它显示了在周期解的唯一性问题上，简单的几何想法能够洞悉深刻的结论。特别的，我们想介绍 Sansone 的三种研究途径：Energy integral, Divergence integral 和 Rotation of the vector field along rays。第一个想法不是新的，因为在第一篇关于 Liénard 方程的文章中就提到并命名了。第二和第三个想法是 Sansone 首次提出的，虽然第三个想法被归功于 Massera。

在第二节我们会从 Levinson-Smith 的文章开始，给出这个理论的演化。一些近期的进展也会描述，但我们很遗憾不能穷尽这方面作者的贡献。

在第三节我们会从几何方法的角度讨论周期解的唯一性，并引发出一些新的问题。我们也会总结根据 Sansone 和 Massera 思想推导的一些新的结果。这个方程也可以被用于一大类的平面微分方程系统。最近 Ciambellotti 的一个新的结果也是从 Massera 的几何方法中得到的。

在第四节我们指出一些周期解唯一性定理还存在的问题。有一些方程虽然简单，但依然不能得到唯一解的结果，而这个现象不能被忽略。Lins-De Melo-Pugh 猜想自 1976 年以来，依然在 $n \geq 3$ 时没有得到解决。

A.2 唯一性定理

我们考虑相平面上的 Liénard 方程

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -g(x) - f(x)y \quad (\text{A-2})$$

我们也考虑被称为 Lienard 平面的系统

$$\dot{x} = y - F(x), \dot{y} = -g(x) \quad (\text{A-3})$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(s) ds$ 。在这篇文章中，我们假设 $f(x)$ 是连续的， $g(x)$ 在和 $f(x)$ 共同的定义域上满足局部 Lipschitz 条件，那么解就是唯一存在的。在以下的文章中我们记 $G(x) = \int_0^x g(s) ds$ ，并且

$$E(x, y) = G(x) + \frac{y^2}{2} \quad (\text{A-4})$$

作为符合系统A-2和A-3的能量方程。一些基本的关于极限环存在性和唯一性的性质和技巧已经在 Liénard 的文章中有描述，可以看成是领域中里程碑式的存在。但在这篇文章之后，第一个对于极限环唯一性的贡献归功于 Levinson 和 Smith。以下结果是他们提供的（记 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 为 $F(+\infty)$ ， G 类似）：

定理 A.1： 假设在 $x \neq 0$ 的情形下 $xg(x) > 0$ ，如果

- 存在 $\delta^- < 0 < \delta^+$ 且 $G(\delta^-) = G(\delta^+)$;
- 在 (δ^-, δ^+) 中 $f(x) < 0$;
- 在其他地方 $f(x) \geq 0$;
- $G(\pm\infty) = F(+\infty) = +\infty$;

那么系统A-2恰好有一个极限环。

这样一个系统被认为是以下系统的特例

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -g(x) - f(x, y)y \quad (\text{A-5})$$

限制到经典的 Liénard 系统下，这篇文章的结论依赖于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对称性。这篇文章也得到了如下的推论：

定理 A.2: 假设 $f(x)$ 是偶函数， $g(x)$ 是奇函数，在 $x \neq 0$ 时 $xg(x) > 0$ 。如果

- 存在 $x_0 > 0$ 使得在 $(0, x_0)$ 中 $F(x) < 0$;
- $F(x) > 0$ 并在 (x_0, ∞) 上单调增;
- $G(\pm\infty) = F(+\infty) = +\infty$

那么A-3有刚好一个极限环。

根据 Liénard 的处理方法，该定理证明类似并无新颖之处。事实上定理 A.2在 $g(x) = x$ 的情形下已经被 Liénard 证明。Liénard 和 Levinson-Smith 的证明都基于了能量方程的导数 $\dot{E}(x, y) = -F(x)g(x)$ ，那么能量方程在环上的积分为 0。拆分积分路径并分别比较类似的部分，可以证明如果 γ_1 和 γ_2 两个周期环有同样的奇点，周期分别是 T_1 和 T_2 ，那么就引出了矛盾：

$$0 = \int_0^{T_1} E(\gamma_1(t)) dt \neq \int_0^{T_2} E(\gamma_2(t)) dt = 0$$

在 Levinson 和 Smith 之后，Sansone 放宽了 $F(x)$ 的对称条件，证明了如下的定理：

定理 A.3: 如果 $g(x) = x$ ，并且

- 存在 $\delta^- < 0 < \delta^+, f(x) < 0$;
- 在 $(\delta^+, +\infty)$ 或 $(-\infty, \delta^-)$ 中 $f(x) > 0$;
- 存在 $\Delta > 0$ 使得 $F(\Delta) = F(-\Delta) = 0$;
- $F(+\infty) = +\infty$ 或者 $F(-\infty) = -\infty$;

那么A-3有唯一稳定的极限环。

在同一方向上对于更广泛的一类方程系统，我们可以在张芷芬，Carletti 和 Villari, Sabatini 和 Villari 等文章中得到跟新近的结果。

下一个定理基于另一种处理方式：

定理 A.4: 如果 $g(x) = x$ ，并且

- 存在 $\delta > 0$ 使得 $x \in (-\delta, \delta)$ 时 $f(x) < 0$, 否则 $f(x) > 0$;
- $F(+\infty) = +\infty$ 或者 $F(-\infty) = -\infty$;

那么A-2恰好有一个稳定的极限环。

以上的定理引入了“稳定性”的概念，被后续的作者使用。Sansone 证明了如果周期为 T 的极限环 $\gamma(t)$ 存在，那么它是吸收的，因为散度的积分 $\int_0^T \text{div}(\gamma(t))$ 是负的。因为两个相邻而同心的极限环不可能都是吸收的，那么唯一性就成立了。这样一个定理证明了极限环的双曲性质，在扰动问题中成为了一个非常重要的特质。

一个在 Sansone 的证明中同样具有创新性的证明极限环唯一性的结果往往被研究者忽略了。我们把这个结果显示如下，作为 Liénard 方程极限环的唯一性定理：

定理 A.5: 如果 $g(x) = x$, 并且

- 存在 $\delta^- < 0 < \delta^+, f(x) < 0$;
- 在 $(\delta^+, +\infty)$ 或 $(-\infty, \delta^-)$ 中 $f(x) > 0$;
- $f(\delta^-) = f(\delta^+) = 0$;
- $|f(x)| < 2$;
- $f(x)$ 在 $(-\infty, \delta^-)$ 上不增，在 $(\delta^+, +\infty)$ 上单调不减；

那么A-3有恰好一个极限环。

这个证明首先把方程转化为极坐标系，考虑方程

$$\frac{d}{d\theta} \ln r(\theta) = \frac{f(r \cos \theta) \sin^2 \theta}{1 + f(r \cos \theta) \sin \theta \cos \theta}$$

Conti 给出了 Sansone 结果的一个推广，使用了 Conti-Filippov 变换

$$(x, y) \mapsto \left(\text{sign}(x) \sqrt{G(x)}, y \right)$$

Sansone 给出的结果有一个弱点，就是 $|f(x)| < 2$ 的假设（这个假设用于防止分母在某一点处取值为 0），但对于多项式方程而言这个结果依然不满意。Sansone 的推演中没有显示这个问题可以被解决的途径。但 Massera 在访问佛罗伦萨并与 Sansone 合作时解决了这个问题。事实上，Massera 的主要贡献在于把 Sansone 的解析方法转为了几何的。Massera 发现 $f(x)$ 的单调性说明向量场在

$x > 0$ 的半平面内随着 r 的增长顺时针旋转，在 $x < 0$ 的半平面内随着 r 的增长逆时针旋转。当 γ 是星形的，其扩张 γ^κ 也是星形的。向量场的旋转使得 A-2 的轨道不断贴近 γ ，从而说明了极限环的吸收性质，根据 Sansone 的论断极限环就是唯一的。反过来，若极限环不是星形的，则 γ_κ 会不断靠近并相交，在 κ 靠近 1 的时候极限环甚至会相交，极限环的吸收性质无法得到。

在 Sansone 的条件 $|f(x)| < 2$ 下，任何非平凡的轨道都有非 0 的角速度。也正因为此，极限环都必须是星形的。

令人惊异的是，极限环的“星形”可以由 $f(x)$ 的单调性简单证明得到，Villari 给出了更详细和通用的一个证明。另一个对于 Massera 几何方法的批评在于，在一般情形下向量场会旋转到一个与初始时相反的位置，从而使得轨道离 γ_κ 疏远。在 A.3 中会说明这种情形对于二阶的方程不会出现。

我们强调极限环的星形性质并不能说明角速度在每个极限环上都是不变号的。事实上，对于最简单的带极限环的 Liénard 方程，比如 Van der Pol 方程，

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

无穷多个穿越第二和第四象限的极限环都会变化角速度。因为极限环的星形性质，我们可以推知这个极限环位于区域 $x^2 - xyf(x) + y^2 > 0$ 中。其他关于这个问题的延伸讨论可以参见 Carletti, Rosati, Villari 和 Ciambellotti 的文章，但大多还都借鉴了 Massera 的想法。

在这个综述的末尾，我们要提起一个用非传统方法使用“散度方法”的结果。在一些新的文章中，“稳定性算子”为研究极限环的双曲性质而被引入。稳定性算子 $\Psi(x, y)$ 是这样定义的，当 γ 是一个周期为 T 的极限环，并且

$$\int_0^T \Psi(\gamma(t)) dt \neq 0$$

那么 γ 就是双曲的。而散度的定义就符合稳定性算子的定义。其他符合该定义的还有正交向量场的曲率

$$\nu = \frac{[V, W] \wedge V}{V \wedge W}, V \wedge W \neq 0$$

其中 $[V, W]$ 是 V 和 W 的李括号, $V \wedge W$ 是令 V 和 W 分别为行的矩阵的行列式值。这样的函数 v 有如下相关性质:

$$\int_0^T (\text{div}V)(\gamma(t)) dt = \int_0^T \frac{[V, W] \wedge V}{V \wedge W}(\gamma(t)) dt$$

特别的, 如果在一个定义域内 $v \leq 0$, 那么这个域内不会有二个极限环 (因为极限环的吸收性质)。这是 Sansone 最初的论点, 但用类似方法可以证明极限环的双曲性质, 而双曲型并不能从 Sansone-Massera 的方法中得到。

最后, 我们发现 Massera 定理是以下结论令 $W(x, y) = (x, y)$ 时的一个特例。事实上, 给定任意的平面微分系统

$$\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y) \quad (\text{A-6})$$

令 $W(x, y) = (x, y)$, 假设对于 $Q \neq 0$,

$$v = \frac{P(xQ_x + yQ_y) - Q(xP_x + yP_y)}{yP - xQ} = \frac{r \left(\frac{\partial Q}{\partial r P} \right)}{yP - xQ} = \frac{r}{y\dot{x} - x\dot{y}} \left(\frac{\partial \dot{y}}{\partial r \dot{x}} \right) \quad (\text{A-7})$$

换句话说, 如果 v 不变号, 那么向量场沿着射线单调旋转。而如果

$$\dot{x} = P(x, y) = y, \dot{y} = Q(x, y) = -x - yf(x)$$

那么

$$v = -xf'(x) \frac{y^2}{x^2 + xyf(x) + y^2} \quad (\text{A-8})$$

如果分母 $x^2 + xyf(x) + y^2$ 不为 0, v 的符号和 $xf'(x)$ 相同, 我们得到了 Sansone-Massera 一样的条件。

A.3 一个新的结果

我们将当 r 增加时, 向量场沿着射线单调旋转的性质称为弧度单调 (radial angular monotonicity, RAM)。Massera 定理以及许多 Massera 类的定理潜在假设是极限环绕原点顺时针旋转, 而这是 $\dot{x} = y$ 的结果。如果 RAM 成立, 那么每个极限环都会有吸收性质, 那么唯一性就成立。事实上, 绕原点逆时针旋转的极限环展现出排斥性质, 因此如果 RAM 成立, 那么唯一性也可以被证明。另一方

面，仅在 RAM 成立的条件下，顺时针和逆时针旋转可以同时成立，从而不能证明唯一性。这样的带有有限或者无限多极限环的范例有许多，我们在这里展示一个满足 RAM 的多项式系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = y(x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x(1 - 3(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2) \\ \dot{y} = -x(x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2) + y(1 - 3(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2) \end{cases} \quad (\text{A-9})$$

这样一个系统有两个星形的极限环（此处恰好是圆形）： $x^2 + y^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 和 $x^2 + y^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 。内部的吸引外部的排斥，向量场顺时针旋转。

所以，为了让 Massera 定理能够对这样的动力系统适用，就必须加入防止相反方向极限环产生的假设。这并不会一直在全平面上成立，只要在包含两个相邻极限环的局部区域内成立就已经是充分条件了。

我们在这里加入了一些额外的条件，使得在 RAM 成立的条件下，唯一性成立。下一个定理是对于定义在全平面上的系统的，但也可以很容易所见到任意的包含原点的局部。我们假设 A-6 的解是存在且唯一的。令

$$\alpha(x, y) = P(xQ_x + yQ_y) - Q(xP_x + yP_y) \quad (\text{A-10})$$

在下一个定理中，区间 (a, b) 可以改成任意的射线或者 R 。

定理 A.6: 假设 A-6 在原点是唯一的均衡点。假设在 Ω 内 $\alpha(x, y) \geq 0$ ，如果以下两个条件满足

- 对于任意 $(x, y) \in R^2$ ， $(x, y) \neq (0, 0)$ ，对于任意 $\tau > 0$ ，向量 $V(\tau x, \tau y)$ 和 $V(x, y)$ 是线性无关的；
- 存在 C^1 ，开的 Jordan 曲线 $\eta : (a, b) \rightarrow R^2$ ， $\lim_{s \rightarrow a^+} |\eta(s)| = 0$ ， $\lim_{s \rightarrow b^-} |\eta(s)| = +\infty$ ，并且 $\dot{\theta}(\eta(s)) > 0 (< 0)$ ；

那么系统 A-6 在 Ω 内至多只有一个极限环。

证明 根据 A-7， α 的符号是 $\frac{\dot{\theta}}{x}$ 的弧度导数。由于均衡点是唯一的，因此所有的极限环是同心的。

(1) 是 Massera 原有论据的一个变体。如果一个环 γ 存在，那么考虑 γ 的 κ 扩张，特别的 $\gamma = \gamma_1$ 。不妨设 γ_1 是顺时针旋转的。那么对于 $\kappa - 1$ 是小的正值时， V 指向 γ_k 的内部。如若不然，假设存在 κ^* 和 (x^*, y^*) ， $V(x^*, y^*)$ 指向 κ^*

的外部, 那么根据连续性, 存在 $V(x^+, y^+)$ 与 γ_{k^+} 相切。而旋转的单调性说明 $V(x^+, y^+)$ 与 $V(x_1, y_1)$ 方向相反且平行, 与假设 (1) 矛盾。

(2) 反证, 假设有两个不同的极限环 γ_i, γ_e , γ_i 在 γ_e 的内部。因为两个极限环都是星形的, $\dot{\theta}$ 在其内不变符号。进一步的, 因为他们都和曲线 η 相交, 从而 $\dot{\theta}(\gamma_i) \geq 0$ 且 $\dot{\theta}(\gamma_e) \geq 0$, 因此两个极限环都是吸收的, 矛盾。 \square

Liénard 方程满足 (1) 和 (2) 两个条件。Liénard 方程满足上述的 (1) 因为在定义域 $(0, +\infty)$ 上, $\eta(s) = (0, s)$ 时 $\dot{x} = y$ 。

下一个推论拓展了 Ciambellotti 的结论。考虑如下的方程组

$$\dot{x} = k(y), \dot{y} = -f(x)l(y) - \sum_{j=0}^n h_j(x)m_j(y) \quad (\text{A-11})$$

推论 A.1: 假设 $k(y), l(y)$ 是 d 阶齐次函数, $h_j(x)$ 是 j 阶, $m_j(y)$ 是 $d-j$ 阶。 $f(x)$ 可微。如果 $yk(y) > 0$ 且 $yl(y) > 0$, $xf'(x) \geq 0$, 那么上述系统有至多一个极限环。

证明 令 $\eta(s) = (0, s)$, 系统 A-11 满足定理 A.6 的假设 (2)。

$$\begin{aligned} \alpha &= k \left[-xf'l - x \sum h'_j m_j - yf'l' - y \sum h_j m'_j \right] + \left[fl + \sum_{j=0}^n h_j m_j \right] yk' \\ &= -xf'l k - k \sum x h'_j m_j - yf'l' k - k \sum h_j y m'_j + f l y k' + y k' \sum_{j=0}^n h_j m_j \\ &= -xf'l k - k \sum j h_j m_j - d f l k - k \sum h_j (d-j) m_j + d f l k + d k \sum_{j=0}^n h_j m_j \\ &= -xf'l k + k \left[- \sum j h_j m_j - \sum h_j (d-j) m_j + d \sum_{j=0}^n h_j m_j \right] = -xf'l k \end{aligned}$$

$-xf'(x)l(y)k(y)$ 的符号和 $-xf'(x)$ 一样, 所以 α 的符号就是 $-xf'(x)$ 的符号。 \square

一个这样系统的例子是

$$\dot{x} = y^3, \dot{y} = (5x^2 - 1)y^3 - x^3 - xy^2 \quad (\text{A-12})$$

A.4 一个遗留的问题

在这篇文章的末尾，在罗列了一些定理以说明通用性之后，我们想指出一个仍然等待解决的问题。考虑 Liénard 方程中 $f(x)$ 是三次方程的情形，

$$\ddot{x} + (ax^3 + bx^2 + cx + d)\dot{x} + x = 0$$

这样一个方程显然不能由上面的结果被分析出来。如果能解决这个方程的极限环唯一性问题，那么就解决了 Lins-De Melo-Pugh 猜想在 $n = 3$ 的特殊情形。这个猜想是著名的希尔伯特第 16 问题的一部分。Lins-De Melo-Pugh 猜想在 $n = 2$ 的情形已经被他们自己和中国的张芷芬解决了，不过英文版本的解答直到很晚后才出现。